

ӘЛ-ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
Физика-техникалық факультет
Электроника және астрофизика кафедрасы

Алимгазинова Н.Ш.

Аспан механикасы

пәні бойынша дәрістер жинағы

«Физика және астрономия» мамандығы бойынша білім алушы
студенттерге арналған

Алматы, 2025

10-дәріс. Либрация нүктелері. Хилл сызықтары

Дәрістің мақсаты. Білім алушыларға либрация нүктелерінің (Лагранж нүктелері) физикалық мәнін және олардың динамикалық тұрақтылығын түсіндіру; Хилл сызықтарының табиғатын және үш дене жүйесіндегі қозғалыстың шекараларын анықтаудағы рөлін меңгерту; сондай-ақ үш дененің шектелмеген есебін қарастыру арқылы аспан денелерінің күрделі өзара тартылыс әсерінен туындайтын қозғалыстарды талдауға үйрету.

Жоспар

1. Либрация нүктелері
2. Хилл сызықтары
3. Үш дененің шектелмеген есебі

1. Либрация нүктелері

Бір сызық бойымен бағытталмаған екі ауыр нүктенің күш әсерінен инерциалдық жүйеде үш дене есебіндегі кіші массасы бар дене ауыр нүктелерге қарағанда тепе-теңдік жағдайында бола алмайды. Салыстырмалы жүйеде осындай нүкте әр түрлі бағытталған үш күш әсерінде болады (екі гравитациялық күштер және ортадан тепкіш күш), сондықтан осында да тепе-теңдік күйі болуы мүмкін емес. Үш дененің шектеулі жазықты шеңберлік есебінде кіші массасы бар нүктенің тепе-теңдік күйі кейбір орналасу кезінде болады. Осы *салыстырмалы тепе-теңдік орналасу нүктелерін – либрация нүктелері деп атайды.*

Тепе-теңдік күйінде $\ddot{Z}$ үдеуі және $\dot{Z}$ жылдамдығы 0 тең болады. Сондықтан Z комплекстік координата осы теңдеуге сәйкес келу керек

$$Z + \frac{\mu}{\rho_1^3}(1 - \mu - Z) - \frac{1 - \mu}{\rho_2^3}(\mu + Z) = 0 \quad (1)$$

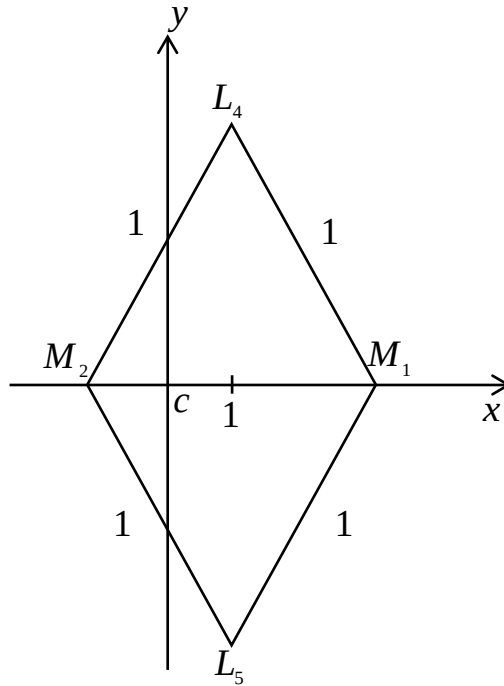
немесе

$$Z \left(1 - \frac{\mu}{\rho_1^3} - \frac{1 - \mu}{\rho_2^3} \right) = \mu(1 - \mu) \left(\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{1}{\rho_2^3} \right). \quad (2)$$

(2) теңдеудің оң жақ бөлігі нақты болса, Z координатасы нақты болу керек немесе оң жақтағы бөлігі мен сол жақтағы жақша ішінде орналасқан нақты көбейтіндісі 0 тең болу керек.

Егер (2) оң жақ бөлігі 0 тең болса, $\rho_1 = \rho_2$ және егер (2) сол жақтағы жақша ішінде орналасқан нақты көбейтіндісі 0 тең болса, $\rho_1 = \rho_2 = 1$ болады. M_1 мен M_2 нүктелер арасында қашықтық 1 тең болады және осы үш нүкте теңқабырғалы үшбұрышты құрайды. Осы кезде екі конфигурация болу мүмкін – біреуі $-y > 0$, екіншісі $-y < 0$ координаттарында. Бұл нүктелер

либрацияның үшбұрыш нүктелері деп аталады және L_4 мен L_5 арқылы белгіленеді.



1 сурет – Либрацияның үшбұрыш нүктелері

Егер Z координатасы нақты болса, барлық либрация нүктелері бір сызықтың бойында орналасады. Осы кезде $M_{1,2}$ нүктелерге дейінгі қашықтықтары мен координаттары белгілі бір теңдеулерімен байланысады. Теңдеулердің түрлері кіші массасы бар нүктенің орналасуына байланысты болады. Нүктенің әр түрлі орналасу жағдайларын қарастыруға болады.

а) M нүктесі M_1 және M_2 ауыр нүктелер арасында орналасқанда (2,а сурет), келесі байланыс теңдеулері қолданылады

$$\rho_1 + \rho_2 = 1, \quad \mu + Z + \rho_1 = 1. \quad (3a)$$

(2) теңдеуінен (3) көмегімен ρ_2 және Z жоққа шығару арқылы келесі теңдеуді аламыз

$$(1 - \mu - \rho_1) \left(1 + \frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{1 - \mu}{(1 - \rho_1)^3} \right) = \mu(1 - \mu) \left(\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{1}{(1 - \rho_1)^3} \right). \quad (4)$$

(4) теңдеуін түрлендіру арқылы ρ_1 қашықтық үшін бесінші дәрежедегі алгебралық теңдеуін аламыз

$$\rho_1^5 - (3 - \mu)\rho_1^4 + (3 - 2\mu)\rho_1^3 - \mu(1 - \rho_1)^2 = 0. \quad (5)$$

ә) M нүктесі M_1 ауыр нүктенің оң жағынан орналасқанда (2,ә сурет), келесі байланыс теңдеулері қолданылады

$$\rho_2 = 1 + \rho_1, \quad \mu + Z - \rho_1 = 1. \quad (3\text{ә})$$

Осы кезде ρ_1 қашықтық үшін бесінші дәрежедегі алгебралық теңдеуін аламыз

$$\rho_1^5 + (3 - \mu)\rho_1^4 + (3 - 2\mu)\rho_1^3 - \mu(1 + \rho_1)^2 = 0. \quad (7)$$

б) M нүктесі M_2 ауыр нүктенің сол жағынан орналасқанда (2,б сурет), келесі байланыс теңдеулері қолданылады

$$\rho_1 = 1 + \rho_2, \quad \rho_2 = \mu + Z. \quad (3\text{б})$$

Осыдан ρ_2 қашықтық үшін бесінші дәрежедегі алгебралық теңдеуін аламыз

$$\rho_2^5 + (2 + \mu)\rho_2^4 + (1 - 2\mu)\rho_2^3 - (1 - \mu)(1 + \rho_2)^2 = 0. \quad (8)$$

Сонда 3 *либрацияның тұзусызықты нүктелері* болады. Әр жағдайға сәйкес L_1 , L_2 , L_3 белгіленулер енгізіледі. ρ_1 мен ρ_2 қашықтықтар итерация әдісімен анықталады. Мысалы, L_1 нүктесі үшін

$$\rho_1^{(k)} = \left(\frac{\mu(1 - \rho_1^{(k-1)})^2}{(\rho_1^{(k-1)})^2 - (3 - \mu)\rho_1^{(k-1)} + 3 - 2\mu} \right)^{1/3}. \quad (9)$$

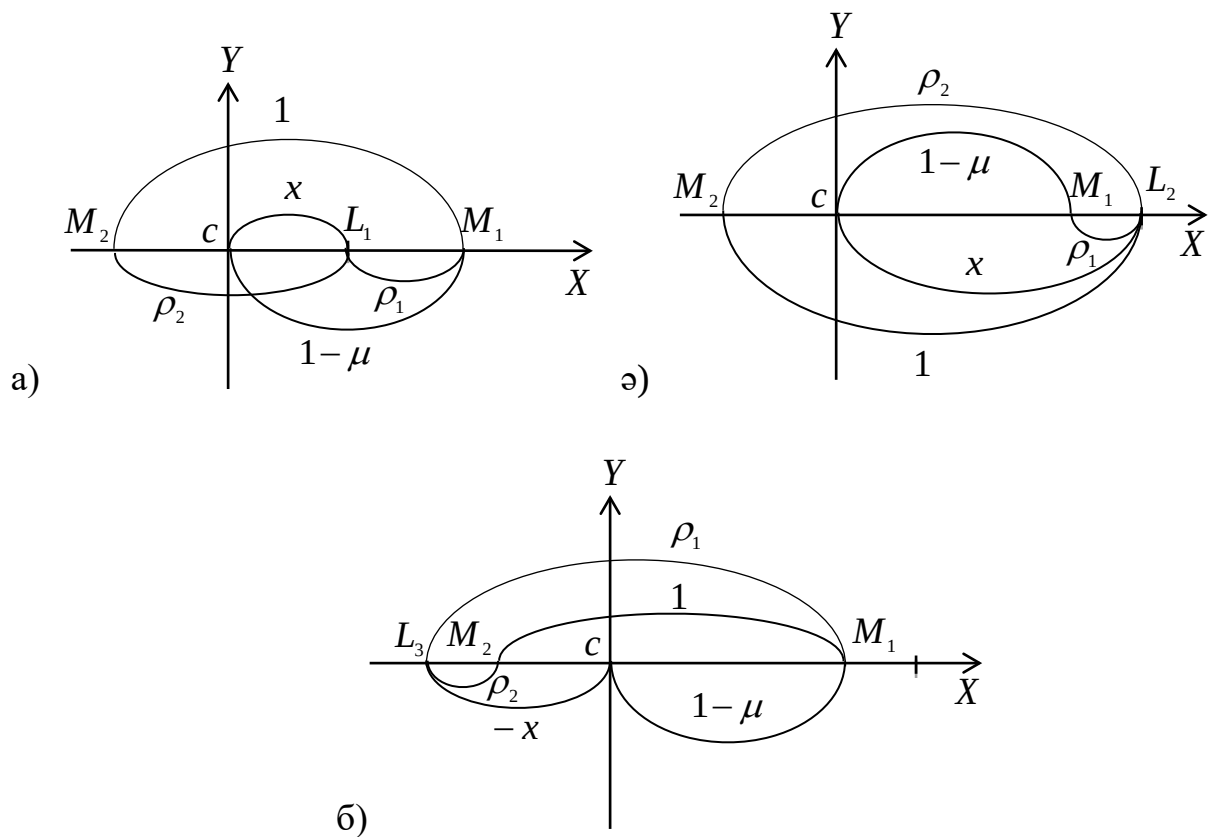
$\mu^{1/3}$ дәрежесі бойынша ρ_1 мәндері үшін және μ дәрежесі бойынша ρ_2 мәндері үшін келес қатарларды алуға болады

$$\rho_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \mu^{1/3} - \frac{\sqrt[3]{3}}{9} \mu^{2/3} - \frac{1}{27} \mu + \dots, \quad (L_1)$$

$$\rho_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \mu^{1/3} + \frac{\sqrt[3]{3}}{9} \mu^{2/3} - \frac{1}{27} \mu + \dots, \quad (L_2) \quad (10)$$

$$\rho_2 = \frac{7}{12} \mu - \frac{1127}{20736} \mu^3 + \dots \quad (L_3)$$

$\mu \ll 1$ мәндерінде L_1 мен L_2 либрация нүктелері M_1 нүктесіне бірдей қашықтықта жақын орналасады.



2 сурет – Либрацияның түзусызықты нүктелері

2. Хилл сызықтары

Якоби интегралы үш дененің шектеулі шеңберлік есебін сапалық түрінде зерттеу мүмкіндігін береді: кіші массасы бар нүктенің бастапқы шарттар кезіндегі қозғалыс болатын және қозғалыссыз аймақтарын анықтайды.

Қозғалыс кезінде нүктенің салыстырмалы жылдамдығы $v = 0$ болады. Сонда нүктелердің кеңістіктегі орналасу нүктелердің геометриялық орны келесі тендеумен беріледі

$$2U(x, y) - c = r^2 + \frac{2\mu}{\rho_1} + \frac{2(1-\mu)}{\rho_2} - c = 0. \quad (11)$$

x, y жазықтықта нүктелердің геометриялық орны сызық болады, оны Хилл сызығы немесе нольдік жылдамдығының сызығы. Осы жағдайда үдеу $\dot{v} \neq 0$, сондықтан Хилл сызығындағы нүктелер $U(x, y)$ функцияның экстремум нүктелері ретінде болмайды. Егер M нүктесі өзінің қозғалыс кезінде Хилл сызығын кесіп өтсе, функцияның таңбасы өзгеру керек. Сонда осы сызықтың бір жағында v^2 теріс таңбасымен болу қажет, бірақ бұл мүмкін емес. Сондықтан кіші массасы бар нүкте тек осы шарт орындалатын жазықтың бөлігінде қозғалуы мүмкін

$$2U(x, y) - c \geq 0. \quad (12)$$

Либрация нүктелерінің координаттарын $U(x, y)$ функцияның экстремум нүктелері ретінде табуға болады.

c - Якоби интеграл тұрақтысының әр түрлі мәндері кезіндегі Хилл сызықтарын талдауға болады.

1. Егер $c \gg 1$ болса, $r \gg 1$ немесе $\rho_{1,2}$ қашықтықтардың біреуі кіші болу керек. Бірінші жағдайда (11) теңдеудің екінші мен үшінші қосылғыштар c мәніне қарағанда төмен болады, осы кезде M нүктесі $M_{1,2}$ нүктелерден алыс орналасады. Сондықтан, Хилл сызығының теңдеуі жуықтау түрінде - $r^2 = c$ және сызық $\sqrt{c}$ радиусы бар шеңбердің түріне жақын болады. Екінші жағдайда (11) теңдеудің екінші мен үшінші қосылғыштар 1-ден көп есе жоғары болады, ал $r^2 \approx 1$. Осы жағдай үшін Хилл сызығының теңдеуі

$$\frac{2\mu}{\rho_1} + \frac{2(1-\mu)}{\rho_2} = c. \quad (13)$$

Осы теңдеу арқылы екі тұйықталған қисық сызықтарын аламыз: бірі - M_1 , екіншісі - M_2 нүктелерін қоршайды. Бұл қисық сызықтары геометрияда «сопақ» деп атайды және түрлері эллипстерге ұқсайды. Осы сопақтар $r^2 = c$ шеңберімен бірге 3,а суретінде көрсетілген. Кіші массасы бар дененің қозғалысы тек келесі жағдайларда болу мүмкін:

- $\sqrt{c}$ үлкен радиусы бар шеңбердің шекарасынан тыс аймақтарында;
- сопақтың ортасында немесе $M_{1,2}$ нүктелердің маңында.

2. c тұрақтысын азайту кезінде, сопақтардың түрі өзгереді және квазишеңбердің ауданы азаяды, ал квазисопақтардың – ұлғаяды. Белгілі бір $c = c_1$ сыни мәнінде сопақтар бір-бірімен жанасады. Бұл жағдай L_1 либрацияның ішкі нүктесінде болады (3,ә сурет).

3. c тұрақтысын тағы азайту кезінде - $c < c_1$, сопақтардың жанасу нүктесінің ауданы үлкейеді. Осы жағдайда M нүктесінің қозғалыс аймағы екібайланысты болады (3,б сурет).

4. $c = c_2$ сыни мәнінде ішкі мен сыртқы Хилл сызықтары L_2 либрация нүктесінде жанасады (3,в сурет).

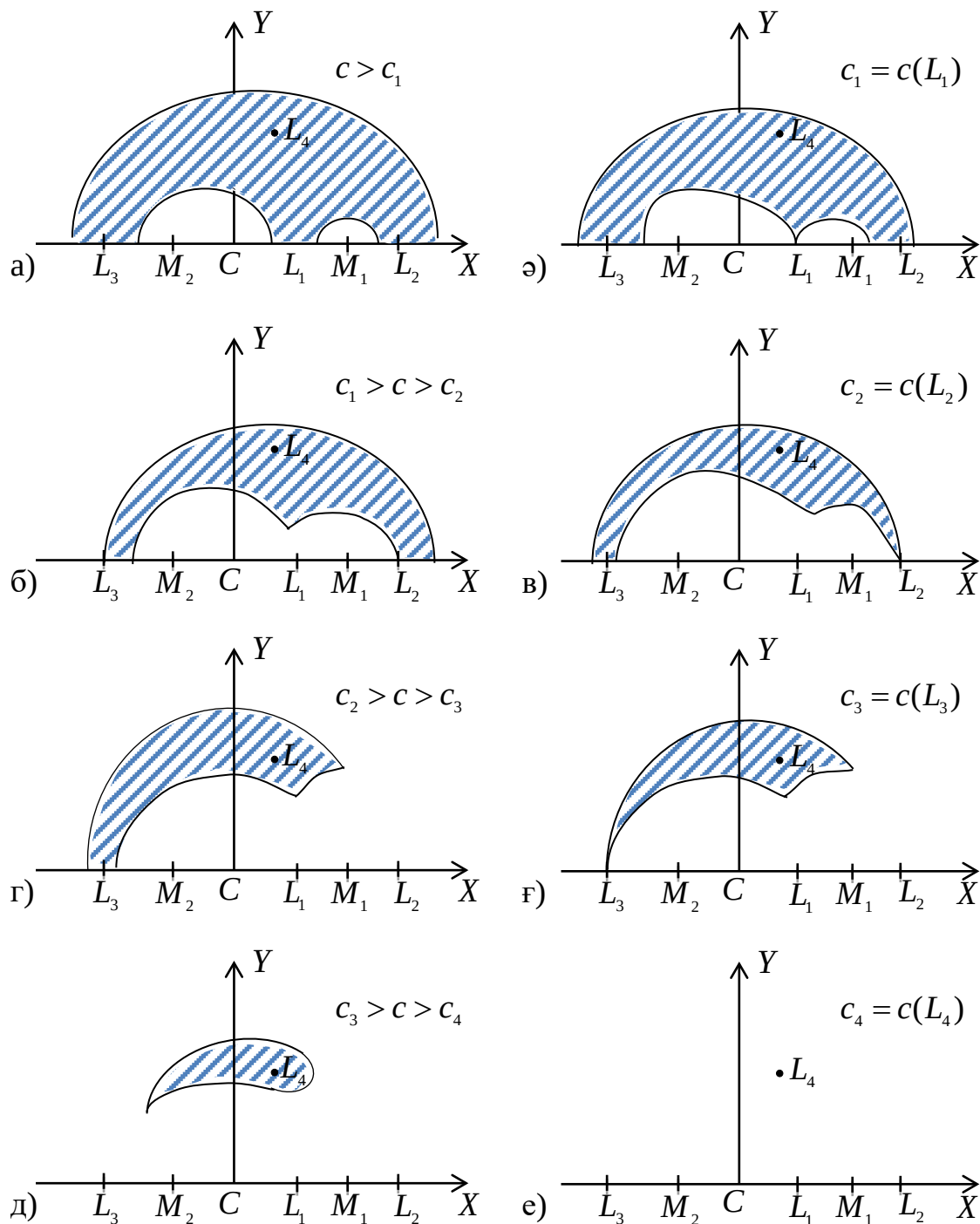
5. Егер $c > c_2$ болса, L_2 нүктесінің маңында M нүктесінің қозғалыс аймағы бірбайланысты болады (3,г сурет).

6. c тұрақтысын сыни мәніне дейін азайту кезінде - $c = c_3$, ішкі мен сыртқы Хилл сызықтары L_3 либрация нүктесінде жанасады (3,ғ сурет).

7. $c < c_3$ мәндерінде Хиллдің бірыңғай сызығы қайтадан екі тұйықталған сызықтарына бөлінеді. Осы жағдайда M нүктесінің қозғалысы,

L_4 пен L_5 либрацияның үшбұрыш нүктелерін қоршайтын аймақтарынан басқа, барлық аймақтарында болады (3,д сурет).

8. c тұрақтысын сыни мәніне дейін азайту кезінде - $c = c_4$, $L_{4,5}$ Хилл сызықтарына жинақталады (3,е сурет).



3 сурет – Якоби интеграл тұрақтысының әр түрлі мәндері кезіндегі Хилл сызықтары

Осы талдау арқылы Хилл сызықтарының структурасына либрация нүктелерінің әсері маңызды екенін көрініп тұр. Либрацияның түзусызықты

нүктелерінде Хилл сызықтарының бір мағыналылығы сақталмайды – бұл өздік қиылысу нүктелері. Үшбұрыш нүктелері – Хилл сызықтар жиынтығының сыни нүктелері. x_k, y_k - либрация нүктелерінің координаттар мәндерін (11) теңдеуіне қою арқылы c_k - Якоби тұрақтысының сыни мәндерін анықтауға болады. c_k мәндері мен либрация нүктелердің координаттары μ параметріне немесе M_1 және M_2 ауыр нүктелер массаларының қатынасына тәуелді болады.

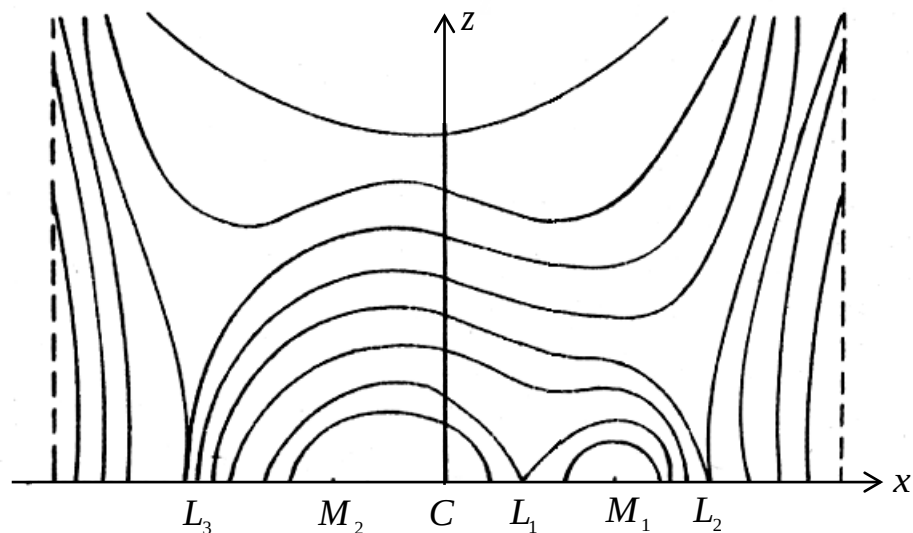
Үш дененің кеңістік шектеулі есебінде нольдік салыстырмалы жылдамдығының геометриялық орнын алған кезінде – Хилл беттері қарастырылады. 3 суретте Хилл беттерінің $z = 0$ жазықтығымен қиындылардың структурасы туралы мәлімет береді (z - аппликата).

Хилл беттерінің $y = 0$ жазықтығымен қиындылардың структурасы (4 сурет) келесі теңдеумен анықталады

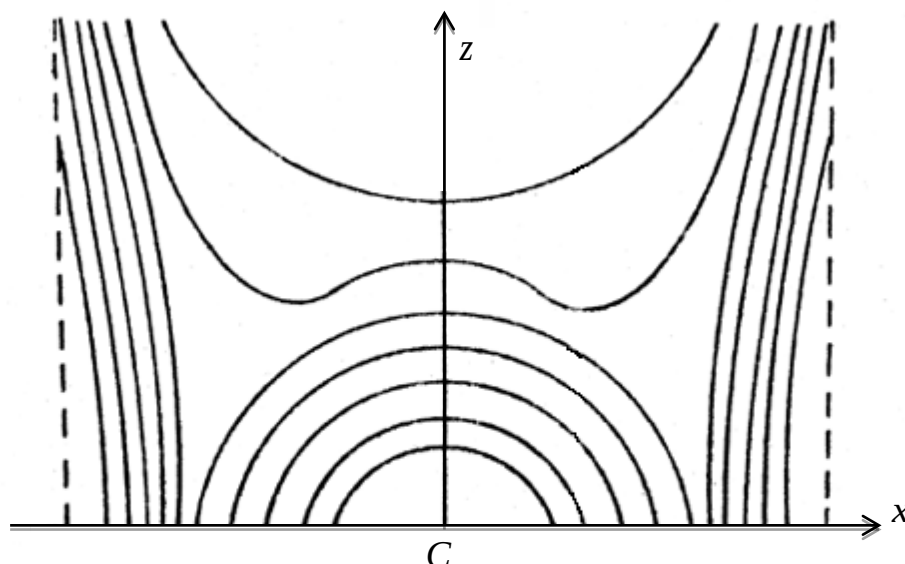
$$x^2 + \frac{2\mu}{\rho_1} + \frac{2(1-\mu)}{\rho_2} = c. \quad (14)$$

$x = 0$ жазықтығы мен қиындылардың структурасы (5 сурет) келесі теңдеумен анықталады

$$y^2 + \frac{2\mu}{\rho_2} + \frac{2(1-\mu)}{\rho_1} = c. \quad (15)$$



4 сурет – Үш дененің кеңістік шектеулі есебіндегі $y = 0$ жазықтықтың мен Хилл беттерінің қиындылары



5 сурет – Үш дененің кеңістік шектеулі есебіндегі $x = 0$ жазықтықтығы мен Хилл беттерінің қисындылары

c_1 - Якоби тұрақтысының сыни мәндері кезіндегі Хилл беттері қос жұлдыздар жүйесі физикасында аса маңызды болады. Осы кезде M_1 мен M_2 ауыр нүктелерінің маңында бір-біріне жанасатын жұмыртқа-тәріздес аймақтар – **Рош қуыстары** пайда болады. Егер қос жүйенің бір компоненті өзінің Рош қуысын толтырса, сонда заттың бір компоненттен басқасына эффективті ағып өтуі мүмкін болады. Осы жағдайда қос жүйе **тығыз қос жүйесі** (ТҚЖ) деп аталады. Егер басқа компонент ретінде – эволюцияның соңғы кезеңіне жеткен массивті жұлдыз (пульсар немесе қара құрдым) болса, ТҚЖ қызықты құбылыстар болады. Осы объектке түсетін заттың үдеуі өте жоғары мәндерге ие болады. Осы себептен заттың температурасы жоғарылайды, ал компоненттің осьтік айналу әсерінен пайда болатын аккрециялық диск - рентген сәулеленудің көзі ретінде болады. Осындай қос жүйедегі прецессиялық қозғалыс объектінің бақыланатын айнымалылығына алып келеді.

Кез келген үш дененің кеңістік шектеулі есебінің теңдеуін x, y, z координаттарынан жаңа ξ, η, ζ координаттарына ауысуға болады

$$x = \frac{r}{p} \xi, \quad y = \frac{r}{p} \eta, \quad z = \frac{r}{p} \zeta, \quad (16)$$

осында p - M_1 және M_2 ауыр нүктелерге қарағанда салыстырмалы кеплер қозғалысының фокалды параметрі.

Сонда үш дененің шектеулі есебінің теңдеуі – **Нехвил теңдеуі** арқылы беріледі

$$\begin{aligned}\xi'' &= 2\eta' + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi}, \\ \eta'' &= -2\xi' + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta}, \\ \zeta'' &= \frac{\partial \bar{U}}{\partial \zeta},\end{aligned}\tag{17}$$

осында потенциалдың теңдеуі

$$\bar{U} = \frac{r}{p} \left[\frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2) - \frac{1}{2} e \zeta^2 \cos \nu + p^3 \left(\frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1-\mu}{\rho_2} \right) \right], \tag{18}$$

ал «штрих» белгісі ν - шын аномалия бойынша туындысын көрсетеді.

Хилл сызықтары мен беттер ұғымдары қозғалысты зерттеу үшін және аспан механикасының т.б. мәселелерінде қолданылады.

3. Үш дененің шектелмеген есебі

«Шектеулі есеп» термині тек үш дене есебінде ғана емес, сонымен қатар кез келген кіші массасы бар нүктесінің қозғалыс есебінде, егер осы нүкте өзіне әсер ететін басқа денелердің қозғалысына үлесін қоспаса, қолданылады. Егер әсерлесетін материалдық нүктелердің және денелердің массаларына ешқандай шек қойылмаса, олардың қозғалысын қарастыратын есептер – «шектелмеген есептер» деп аталады. Осы есептердің ішінде ең кең таралған **үш дененің шектелмеген есебі**. Оның теңдеулері инерциалды координат жүйесінде (1) формуласымен берілген. Үш дененің шектелмеген есебінде де либрация нүктелер - бес дербес лагранж шешімдері болады. Сондықтан, осы шешімдерінің орнықтылығын және периодтылығын зерттеу мәселелері пайда болады.

1912 жылы алғаш рет К. Зудманмен дәрежелік қатарлары арқылы үш дененің шектелмеген есебінің интегралын дәл анықтады. Зерттеудің негізгі нәтижесі Зудман теоремасында көрсетілген:

Егер үш дененің шектелмеген есебінде момент интегралының тұрақтысы $c \neq 0$ болса, сонда бастапқы шарттар арқылы I және Ω екі оңтаңбалы тұрақтысын анықтауға болады. Сонда нүктелердің координаттары, олардың арақашықтықтары мен уақыт τ - айнымалы шамасының бүтін оңтаңбалы дәрежелері бойынша қатарларға жіктеледі. Осы қатарлар $|\tau| < 1$ шамаларында абсолютті жинақтылыққа ие болады және t - уақыттың әр түрлі мәндері кезінде үш дене есебіндегі қозғалысты сипаттайды.

I және Ω тұрақтыларын және τ айнымалы шамасын анықтау үшін дифференциалды t - уақытты ω - жаңа айнымалы шамаға алмастыру қажет:

$$dt = \Gamma d\omega, \quad \Gamma = \prod_{k=0}^2 \left(1 - \exp\left(-\frac{R_k}{l}\right) \right). \quad (19)$$

Осылай алмастыру арқылы нүктелердің қозғалысы кезінде соқтығысу процесін сипаттауға мүмкіндік болады. Әр соқтығысу процесінен кейін жаңа бастапқы шарттар болады, олар соқтығысу дейінгі бастапқы шарттармен анықталады. l тұрақтысы келесі теңдеумен анықталады:

$$l = \frac{1}{3} \sqrt{m_0} \frac{c_1^2 R^{(0)}}{\left(R^{(0)} \dot{R}^{(0)}\right)^2 + c_1^2}, \quad (20)$$

осында m_0 - үш нүктенің ең кіші массасы, $R^{(0)}, \dot{R}^{(0)}$ - R шамасының бастапқы мәндері мен оның уақыт бойынша туындысы. R шамасы келесі теңдеу арқылы анықталады

$$R = \sqrt{\frac{\Delta_{12}^2}{m_0} + \frac{\Delta_{02}^2}{m_1} + \frac{\Delta_{01}^2}{m_2}}, \quad (21)$$

осында Δ_{ij} және m_k - жүйенің нүктелер арасындағы қашықтық пен нүктелердің массалары. $m = m_0 + m_1 + m_2$, сонда

$$c_1 = \frac{m_0 m_1 m_2}{m} c. \quad (22)$$

Ω тұрақтысын анықтау теңдеуі

$$\Omega = \frac{l_1 \sqrt{\frac{3l_1}{\mu}}}{\frac{15}{8} \frac{m}{m_0} + \frac{3G_+^2 l_1}{2\mu_0} + \frac{9G_+ \sqrt{\mu l_1}}{2\mu_0} + \frac{3}{4G} l_1 |K| + 224 \sqrt{\frac{16m}{m_0} + \frac{3l_1}{G} |K|}}, \quad (23)$$

осында $l_1 = \frac{2}{29} l$, $\mu = Gm$ - есептің гравитациялық тұрақтысы, $\mu_0 = Gm_0$ - ең кіші массалы нүктенің гравитациялық тұрақтысы. Қосымша тұрақты шама келесі теңдеумен анықталады

$$G_+ = \frac{1}{14l_1} \sqrt{\frac{9c^2}{2m_0^2} + \left(775 + \frac{3m}{m_0}\right) \left(\frac{1}{29} + \frac{m}{4m_0} + \frac{l_1}{16G} |K|\right) \mu l_1}, \quad (24)$$

осында

$$K = -\frac{m}{m_0 + m_1 + m_2}h, \quad (25)$$

h - энергия интегралының тұрақтысы.

τ - айнымалы шама келесі теңдеумен анықталады

$$\tau = th\left(\frac{\pi\omega}{4\Omega}\right). \quad (26)$$

Осындай жолымен алынған нәтижелер күрделі болады, сондықтан Зудман қатарлары практикада қолданылмады. Бірақ Зудман нәтижелерінің принципиалдық мәні өте жоғары, өйткені үш одан да көп денелер есебін аналитикалық зерттеулерге ғалымдарды ынталандырды.

Бақылау сұрақтары

1. Либрация (Лагранж) нүктелері дегеніміз не және олар қайда орналасады?
2. Үш дененің шектеулі есебінде не себепті бес либрация нүктесі пайда болады?
3. L_1 , L_2 , L_3 және L_4 , L_5 нүктелерінің айырмашылығы неде?
4. Либрация нүктелерінің тұрақтылығы қандай шарттармен анықталады?
5. Либрация нүктелерінің аспан механикасындағы маңызы неде (мысалы, Жер–Ай–Күн жүйесінде)?
6. Хилл сызықтары дегеніміз не және оларды анықтау үшін қандай шамалар пайдаланылады?
7. Хилл сызықтары қозғалыстың шектелу аймағын қалай сипаттайды?

Әдебиеттер

1. Алимгазинова Н.Ш. Аспан механикасы. Оқу құралы //Алматы: Қазақ университеті, 2016. – 146 б.
2. Александров Ю. В. Небесная механика: Учебник.— Х.: ХНУ А 46 имени В. Н. Каразина, 2006.— 256 с.
3. Лукьянов Л.Г., Ширмин Г.И. Лекции по небесной механике: Учеб. Пособ. Для вузов. — Алматы, Издат. ..., 2009. 227 с.
4. Алексеев В.М. Лекции по небесной механике. — Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999, 160 с.
5. Холшевников К.В., Титов В.Б. Задача двух тел (учебное пособие). СПб: Изд. СПбГУ, 2007.
6. Холшевников К.В., Никифоров И.И. Свойства гравитационного потенциала в примерах и задачах (учебное пособие). СПб: Изд. СПбГУ, 2008.